Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

---

1) Розв’язати систему нерівностей. У відповіді вказати найбільший цілий розв’язок.

$$\begin{cases} 2x+5>41, \\ 4x-1<3x+37 \end{cases}.$$

2) Розв’язати рівняння: $\left(\sqrt{2}\right)^{4x}=\frac{1}{4}$.

3) На контрольній роботі з математики 20% учнів отримали негативну оцінку, а решта 16 учнів отримали позитивну оцінку. Скільки учнів писали контрольну роботу з математики?

4) Радіус основи циліндру дорівнює 2, площа осьового перерізу 20. Обчислити об’єм такого циліндру.

5) Розв’язати нерівність: $x^{\log_2 x+4}<32$. У відповіді вказати цілий розв’язок.

6) Квадратичну функцію задано формулой $y=ax^2+bx+c$. Відомо, що її графік проходить через точки $A(1,-2), B(-1,3), C(0,0)$. Знайти коефіцієнти a, b, c. У відповідь занести результат їх суми $a+b+c$.

7) Задано функцію $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+6\ln 3x$. Обчислити похідну в заданій точці $f'(2)$.

8) Спростити вираз: $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\div\frac{4a-4b}{3a+3b}$.

9) Розв’язати рівняння: $\frac{x-2}{x+3}=\frac{2(x-2)}{x+5}$. У відповіді вказати суму розв’язків.

10) Скласти рівняння прямої MN, якщо точка $M(5,-2)$, точка $N(0,4)$. Знайти абсцису точки, яка належить прямій MN та ордината якої дорівнює 0.

ОЛІМПІАДА

з елементарної математики

для абітурієнтів 2018 рік

II тур

Варіант складається з 10 завдань по 10 балів кожне:

Таким чином, максимально можна отримати 100 балів.

1) Розв'язати систему нерівностей. У відповіді вказати найбільший цілий розв'язок.

$$\begin{cases} 2x+5>41, \\ 4x-1<3x+37 \end{cases}.$$

Розв'язання. З першої нерівності системи: $2x>36,\ x>18$. З другої нерівності системи: $4x-3x<37+1,\ x<38$. Тобто $18<x<38$. Найбільший цілий розв'язок $x=37$.

Відповідь: 37.

2) Розв'язати рівняння: $\left(\sqrt{2}\right)^{4x}=\frac{1}{4}$.

Розв'язання. $\left(2\right)^{2x}=4^{-1}, \left(2\right)^{2x}=2^{-2}$. Тобто $2x=-2,\ x=-1$.

Зауваження. Можна було привести це рівняння до основи 4, отримати $4^x=4^{-1}$, звідки $x=-1$.

Відповідь: -1.

3) На контрольній роботі з математики 20% учнів отримали негативну оцінку, а решта 16 учнів отримали позитивну оцінку. Скільки учнів писали контрольну роботу з математики?

Розв'язання. 16 учнів, які написали контрольну роботу на позитивну оцінку, складають 80% від загальної кількості учнів класу, отже в класі $16\div 0{,}8=20$ учнів. Також цю задачу можна розв'язати за допомогою пропорції:

$\begin{matrix} 16 \text{ учнів} - 80\%, \\ x \text{ учнів} - 100\% \end{matrix}$. Звідки $x = \dfrac{16 \cdot 100\%}{80\%} = 20$.

Відповідь: 20.

4) Радіус основи циліндру дорівнює 2, площа осьового перерізу 20. Обчислити об'єм такого циліндру.

Розв'язання. Якщо радіус основи циліндра, тобто круга, дорівнює 2, то площа цього круга буде дорівнювати 4π. Осьовий переріз циліндра є прямокутник, одна сторона якого дорівнює 4 (це діаметр основи циліндра), тоді інша сторона цього прямокутника буде дорівнювати $20 \div 4 = 5$. Ця сторона є висотою циліндра H. Тоді об'єм циліндра $V = S_{основи} \cdot H = 20\pi \approx 62{,}8$ кубічних одиниць.

Відповідь: 20π, тобто $62{,}8$.

5) Розв'язати нерівність: $x^{\log_2 x + 4} < 32$. У відповіді вказати цілий розв'язок.

Розв'язання. Допустимі значення $x > 0$, тому $x^{\log_2 x + 4} > 0$. Прологарифмуємо за основою 2 обидві частини нерівності: $(\log_2 x + 4) \cdot \log_2 x < \log_2 32$. Позначимо $\log_2 x = y$. Тоді отримаємо нерівність $y^2 + 4y - 5 < 0$. Знайдемо корені рівняння $y^2 + 4y - 5 = 0$: $y_1 = -5, y_2 = 1$. Тобто $\log_2 x = -5, \log_2 x = 1$, $-5 < \log_2 x < 1$, з останньої нерівності отримаємо $2^{-5} < x < 2^1$, $\dfrac{1}{32} < x < 2$. Цілий розв'язок $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

6) Квадратичну функцію задано формулой $y = ax^2 + bx + c$. Відомо, що її графік проходить через точки $A(1,-2), B(-1,3), C(0,0)$. Знайти коефіцієнти a, b, c. У відповідь занести результат їх суми $a + b + c$.

Розв'язання. Якщо точка $C(0,0)$ належить параболі $y = ax^2 + bx + c$, то коефіцієнт $c = 0$. Підставимо координати точок $A(1,-2), B(-1,3)$ замість x, y в задану функцію. Отримаємо систему: $\begin{cases} a+b=-2, \\ a-b=3 \end{cases}$. З цієї системи $a=\frac{1}{2}, b=-2\frac{1}{2}$. $a+b+c=\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}+0=-2$.

Відповідь: -2.

7) Задано функцію $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+6\ln 3x$. Обчислити похідну в заданій точці $f'(2)$.

Розв'язання: $f'(x)=x^2-4x+\frac{6}{x}$. $f'(2)=2^2-4\cdot 2+\frac{6}{2}=-1$.

Відповідь: -1.

8) Спростити вираз: $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\div\frac{4a-4b}{3a+3b}$.

Розв'язання: $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\div\frac{4a-4b}{3a+3b}=\frac{(a-b)(a+b)\cdot 3(a+b)}{(a+b)^2\cdot 4(a-b)}=\frac{3}{4}=0,75$.

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

9) Розв'язати рівняння: $\frac{x-2}{x+3}=\frac{2(x-2)}{x+5}$. У відповіді вказати суму розв'язків.

Розв'язання: ОДЗ: $x\neq-3, x\neq-5$. $\frac{x-2}{x+3}-\frac{2(x-2)}{x+5}=0$; $\frac{(x-2)(x+5)-(2x-4)(x+3)}{(x+3)(x-5)}=0$; $x^2-2x+5x-10-2x^2+4x-6x+12=0$; $x^2-x-2=0$. $x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}$; $x_1=-1, x_2=2$. $x_1+x_2=-1+2=1$.

Відповідь: 1.

10) Скласти рівняння прямої MN, якщо точка $M(5,-2)$, точка $N(0,4)$. Знайти абсцису точки, яка належить прямій MN та ордината якої дорівнює 0.

Розв'язання: рівняння прямої, яка проходить через дві точки с заданими координатами: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$; : $\frac{x-5}{0-5}=\frac{y+2}{4+2}$; $\frac{x-5}{-5}=\frac{y+2}{6}$; $6x-30=-5y-10$; $6x+5y-20=0$. Якщо $y=0$, то $6x-20=0$; $x=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.

Відповідь: $6x+5y-20=0$. $x=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.